# SỬ DỤNG KIẾN THỨC TOÁN 11 VỀ HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARIT ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÀI CHÍNH.

Các bài toán về hàm số lũy thừa hàm số mũ và hàm số logarit là các bài toán rất hay và có nhiều ứng dụng trong thực tế.

1. Các ứng dụng trong kinh tế: Bài toán lãi suất trong gửi tiền vào ngân hàng, bài toán vay - mua trả góp ...

2.Các ứng dụng trong lĩnh vực đời sống và xã hội. Bài toán tăng trưởng về dân số ....

3.Các ứng dụng trong lĩnh vực khoa học kỹ thuật: Bài toán liên quan đến sự phóng xạ, tính toán các cơn dư chấn do động đất, cường độ và mức cường độ âm thanh ...

Vấn đề tăng trưởng kinh tế luôn được mọi người qua tâm, đặc biệt là lĩnh vực tài chính. Trong bài viết này sẽ đề cập đến các bài toán về tài chính như gửi tiền tiết kiệm, vay tiền ngân hàng, hoặc làm một thẻ ATM mới... Trong các bài toán đó sẽ có những thông tin về lãi suất tiền gửi, lãi suất cho vay, hình thức gửi tiền (vay tiền) và cách tính tiền lãi khi mà lãi suất luôn luôn biến động.

Qua nội dung này, chúng ta sẽ biết vận dụng các kiến thức đã học về hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit vào để giải quyết một số bài toán thực tế liên quan các chủ đề nêu ở trên.

Nội dung bài viết gồm các phần sau:

• Phần 1: Tóm tắt lí thuyết và các kiến thức liên quan.

1.1. Tiền lãi.
1.2. Lãi suất.
1.3. Lãi đơn.
1.4. Lãi kép.
1.5. Lãi kép liên tục.
1.6. Tiền gửi hàng tháng.
1.7. Gửi tiền và rút tiền hàng tháng.
1.8. Mua trả góp.
1.8. Giá trị hiện tại của niên kim.
1.10. Lạm phát.

• Phần 2: Các bài toán ứng dụng thực tế

2.1. Bài toán về lãi đơn.
2.2. Bài toán về lãi kép.
2.3. Bài toán về lãi kép liên tục.
2.4. Bài toán về tiền gửi hàng tháng.
2.5. Bài toán về gửi tiền và rút tiền hàng tháng.
2.6. Bài toán trả góp.
2.7. Bài toán về giá trị hiện tại của niên kim.
2.8. Bài toán về lạm phát.

# PHẦN 1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trước hết chúng ta tìm hiểu một số khái niệm đơn giản sau.

**1.1. Tiền lãi:**

Tiền lãi là một khái niệm xem xét dưới hai góc độ khác nhau là người cho vay và người đi vay.

Ở góc độ người cho vay hay nhà đầu tư vốn, tiền lãi là số tiền tăng thêm trên số vốn đầu tư ban đầu trong một giai đoạn thời gian nhất định. Khi nhà đầu tư đem đâu tư một khoản vốn, họ mong muốn sẽ thu được một giá trị trong tương lai, hơn giá trị đã bỏ ra ban đầu và khoản tiền chênh lệnh này được gọi là tiền lãi.

Ở góc độ người đi vay hay người sử dụng vốn, tiền lãi là số tiến mà người đi vay phải tr ả cho người vay (là người chù s ở hữu v ốn) để được sử dụng vốn trong một thời gian nhất định.

**1.2. Lãi suất:** là tỷ số tiền lãi (nhận được) phải trả so với vốn (cho) vay trong một đơn vị thời gian. (Đơn vị thời gian có thể là năm, quý, tháng, ngày…).
Lãi suất được tính bằng tỷ lệ phần trăm hoặc số lẻ thập phân.

**Ví dụ:** Một ngân hàng A có lãi suất cho tiền vay cho kỳ hạn 1 tháng là 0,6% một tháng. Nghĩa là ta hiểu nếu ban đầu ta vay của ngân hàng A với số tiền 200 triệu đồng thì sau một tháng số tiền lãi ta phải trả là 200.10^6 x 0,6% = 1200.000 đồng.

Bây giờ ta tìm hiểu một số loại lãi suất hay sử dụng trong các ngân hàng và các dịch vụ tài chính: lãi đơn, lãi kép, lãi kép liên tục.

**1.3. Lãi đơn:** là số tiền lãi chỉ tính trên số vốn gốc mà không tính trên số tiền lãi do số vốn gốc sinh ra trong một khoáng thời gian cố định. (Chỉ có vốn gốc mới phát sinh tiền lãi). Bây giờ, hãy tưởng tượng ta cầm một khoản tiền 100.000.000 đồng đến gửi ngân hàng, sau mỗi tháng ta sẽ nhận được 0,5% của số tiền vốn 100.000.000 đồng đó. Tháng nào cũng nhận được số tiền lãi như nhau.
Do đó, ta có thể tóm gọn lại công thức tính tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì như sau

$$P_n = P_0\left(1+nr\right)$$

$P_n$ là tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì hạn.

$P_0$ là vốn gốc.

r là lãi suất mỗi kì.

### 1.4. Công thức lãi kép

**a) Định nghĩa:** Lãi kép là phần lãi của kì sau được tính trên số tiền gốc kì trước cộng với phần lãi của kì trước.

**b) Công thức:** Giả sử số tiền gốc là A; lãi suất r % /kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm).

- Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $\mathbf{A_n = A(1+r)^n}$

- Số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là

$$\mathbf{A_n - A = A(1+r)^n - A = A[(1+r)^n - 1]}$$

- Số tiền gửi ban đầu là $A = \dfrac{A_n}{(1+r)^n}$

- Để tổng số tiền thu về là $\mathbf{A_n}$ thì số kì hạn gửi ít nhất là $n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{A_n}{A}\right)$ với n là số tự nhiên

### 1.5. Công thức lãi kép liên tục

Lãi kép liên tục là thể thức tính lãi kép khi m dần ra vô cực, m là số kì hạn mỗi năm.

Với số vốn ban đầu là P, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất mỗi năm là r thì sau N năm số tiền thu được cả vốn lẫn lãi là

$$\mathbf{A_N = A.e^{N.r}}$$

Công thức trên còn gọi là công thức tăng trưởng mũ. Công thức này thường áp dụng vào các bài toán dân số, tăng trưởng của vi sinh vật….

**1.6. Tiền gửi hàng tháng:** mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào 1 thời gian cố định.

- Công thức tính

Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng, với lãi kép r%/tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in N^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là $S_n$.

$$S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$$

Chú ý: Từ công thức trên ta có thể tính được

$$n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n.r}{A(1+r)} + 1\right) \quad ; \quad A = \frac{S_n.r}{(1+r).\left[(1+r)^n - 1\right]}$$

**2. . Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng**

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r%/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu?

- Công thức tính số tiền còn lại sau n tháng là $S_n = A(1+r)^n - X\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Từ công thức trên ta có thể tính được số tiền rút mỗi tháng là $X = \dfrac{\left[A(1+r)^n - S_n\right].r}{(1+r)^n - 1}$

**1.8. Mua trả góp**

Theo hình thức lãi kép, vay A đồng, lãi suất r%, trả nợ đều đặn mỗi kì số tiền m đồng. Hỏi sau bao nhiêu kì thì trả hết số nợ gồm cả gốc và lãi ?

$$m = \frac{A.r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Từ công thức trên ta có

Số tiền vay gốc là $A = \dfrac{m.\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n}$

Số kì hạn là $n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{m}{m - Ar}\right)$

**1.9. Số tiền của niên kim. Giá trị hiện tại của một niên kim**

**a. Số tiền của niên kim**

Niên kim là một khoản tiền được trả bằng các khoản thanh toán đều đặn. Mặc dù từ “niên kim” nghĩa là các khoản thanh toán hàng năm, thực tế chúng có thể được thực hiện thanh toán nửa năm, hàng quý, hàng tháng hoặc sau những khoảng thời gian đều đặn khác. Thanh toán thường được thực hiện vào cuối khảng thời gian thanh toán.

Số tiền của một niên kim là tổng tất cả các khoản thanh toán riêng lẻ từ thời điểm thanh toán đầu tiên cho đến khi thanh toán cuối cùng được thực hiện, cùng với tất cả tiền lãi.

**Số tiền của niên kim**

Số tiền $A_f$ của một niên kim bao gồm $n$ khoản thanh toán đều đặn bằng nhau và bằng $R$ với lãi suất $i$ trong mỗi khoảng thời gian được cho bởi

$$A_f = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

**b. Giá trị hiện tại của một niên kim**

**Giá trị hiện tại của một niên kim**

Giá trị hiện tại của một niên kim bao gồm $n$ khoản thanh toán đều đặn bằng nhau và bằng $R$ với lãi suất $i$ trong mỗi khoảng thời gian được cho bởi

$$A_p = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

**1.10. Lạm phát.**

Hiểu một cách đơn giản, lạm phát là việc tăng giá chung của các hàng hóa trên thị trường, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó.

Ví dụ như trước đây đi chợ bạn chỉ tốn 100.000 đồng để ăn đủ một ngày. Tuy nhiên, bây giờ cũng với số lượng thức ăn giống hệt như thế nhưng bạn phải bỏ ra đến 150.000 đồng. Như vậy, bạn phải tốn thêm 50 nghìn cho một lượng hàng hóa vẫn như cũ. Hay nói cách khác, lạm phát trong trường hợp này đã tăng 50%.

Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là r% thì tổng số tiền P ban đầu sau n năm có giá trị là $A = P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

# PHẦN 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

## 2.1. Bài toán về lãi đơn:

**Bài toán 1:** Anh Lâm đi gửi ngân hàng với số tiền 100.000.000 đồng theo hình thức lãi đơn với lãi suất 5% một năm. Hỏi nếu anh giữ nguyên số tiền vốn như vậy thì sau 2 năm tổng số tiền anh Lâm rút được về từ ngân hàng là bao nhiêu? (Giả sử lãi suất hàng năm không đổi)

***Phân tích bài toán***

♣ Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0$ = 100.000.000 đồng, hình thức gửi lãi đơn với lãi suất r = 5% một năm và gửi trong thời gian n = 2 năm.

♣ Đề bài yêu cầu tìm tổng số tiền anh Lâm rút được từ ngân hàng sau 2 năm, lúc này ta sử dụng trực tiếp công thức $P_n = P_0(1+nr)$ (1)

**Hướng dẫn giải**

• Áp dụng công thức (1) ta tính được tổng số tiền anh Lâm rút được từ ngân hàng sau 2 năm là:

$P_2$ =100.000.000x(l + 2 x 5%) = 110.000.000 đồng.

• Cũng sau hai năm số tiền lãi mà anh Lâm thu được là:

110.000.000 - 100.000.000 = 10.000.000 đồng.

■ Bình luận: Qua bài toán này ta cần lưu ý:

Kkhi tính toán các yếu tố trong bài toán gửi tiền vào ngân hàng này các em cần lưu ý là dữ kiện ban đầu tính theo hình thức lãi suất nào: Lãi đơn hay loại lãi khác... từ đó xác định đúng công thức tính toán cho từng trường hợp.

Nếu lãi suất và thời hạn gửi không cùng đơn vị thời gian, ta phải biến đổi để chúng đồng nhất về thời gian rồi mới áp dụng công thức (1).

**Bài toán 2:** Ông Nam góp vốn 500.000.000 đồng, đầu tư vào một công ty sản xuất rau sạch với lãi suất đầu tư 12% một năm (theo hình thức lãi đơn) trong vòng 1 năm 6 tháng. Xác định giá trị đạt được vào cuối đợt đầu tư.

***Phân tích bài toán***

♣Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0$ = 500.000.000 đồng, hình thức đầu tư lãi đơn với lãi suất r = 12% = 0,12 một năm và đ ầu tư trong thời gian

n = 1 năm 6 tháng.

Như vậy trong bài này ta thời gian đầu tư chưa cùng đơn vị với lãi suất nên ta phải đổi chúng về cùng đơn vị thời gian. Trong bài này ta có thể đưa về đơn vị thời gian cùng là năm hoặc cùng là tháng.

♣ Đề bài yêu cầu tìm tổng số tiền ông Nam đạt được sau 2 năm 3 tháng, lúc này ta sử dụng trực tiếp công thức $P_n = P_0(1+nr)$

**Hướng dẫn giải**

Cách 1: Đưa đơn vị thời gian cùng là năm

Áp dụng công thức (1) ta tính được t ổng s ố tiền ông Nam đạt được sau 1 năm 6 tháng (nghĩa là 1,5 năm) $P_{1,5}$ =500.000.000x(1 + 1,5 x 12%) = đồng.

Cách 2: Đưa đơn vị thời gian cùng là tháng.

• Qui đổi lãi suất tháng: 1%

• Áp dụng công thức (1) ta tính được tổng số tiền ông B đạt được sau 1 năm 6 tháng (nghĩa là 18 tháng) là $P_{18}$ =500.000.000x(1 + 18 x 1%) = đồng.

■ Bình luận: Qua bài toán này ta cần lưu ý:

Khi tính toán các yếu tố trong bài toán đầu tư này các em cần lưu ý là dữ kiện ban đầu tính theo hình thức lãi suất nào: Lãi đơn hay loại lãi khác... từ đó xác định đúng công thức tính toán cho từng trường hợp.

Nếu lãi suất và thời hạn gửi không cùng đơn vị thời gian, ta phải biến đổi để chúng đồng nhất về thời gian rồi mới áp dụng công thức (1). Bây giờ các em cùng qua tìm hiểu dạng toán thứ 2.

**2.2. Bài toán về lãi kép:**

**Bài toán 1.** Chú Việt gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 5%/năm. Tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm.

**Lời giải:**

Số tiền cả gốc lẫn lãi nhận được sau 10 năm với lãi kép 5%/năm là

$$S_{10} = 10.\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10} \approx 16,28894627 \text{ triệu đồng.}$$

**Bài toán 2.** Một người gửi số tiền 500 (triệu đồng) vào ngân hàng với lãi suất 6,5%/năm theo hình thức lãi kép. Đến hết năm thứ 3, vì cần tiền nên người đó rút ra 100 (triệu đồng), phần còn lại vẫn tiếp tục gửi. Hỏi sau 5 năm kể từ lúc bắt đầu gửi, người đó có được số tiền là bao nhiêu? (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình gửi; không kể 100 (triệu đồng) đã rút).

**Lời giải:**

Số tiền nhận được sau 5 năm là $S = \left[500(1+0,065)^3 - 100\right](1+0,065)^2 \approx 571,620$ triệu đồng

**Bài toán 3.** Một khách hàng gửi ngân hàng 20 triệu đồng, kỳ hạn 3 tháng, với lãi suất 0,65 % một tháng theo phương thức lãi kép. Hỏi sau bao lâu vị khách này mới có số tiền lãi nhiều hơn số tiền gốc ban đầu gửi ngân hàng? Giả sử người đó không rút lãi ở tất cả các định kỳ.

**Lời giải:**

Lãi suất theo kỳ hạn 3 tháng là 3. 0,65 %= 1,95 %

Gọi n là số kỳ hạn cần tìm. Theo giả thiết ta có n là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn:

$20.(1+0{,}0195)^n - 20 > 20$

Ta được n= 36 kì hạn, một kì hạn là 3 tháng.

Nên thời gian cần tìm là 36. 3= 108 tháng = 9 năm.

**Bài toán 4.** Ông An gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là 27 507 768,13 đồng. Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

**Lời giải:**

Tổng số tiền cả vốn và lãi (lãi chính là lợi tức) ông Năm nhận được từ cả hai ngân hàng là

320 000 000 + 27 507 768,13 = 347 507 768,13 đồng = 347, 50776813 triệu đồng.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng X, khi đó 320 − x (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng Y.

Số tiền ông Năm có được ( cả gốc lẫn lãi) ở ngân hàng X trong 15 tháng = 5 quý là $x.(1+0{,}021)^5$ triệu đồng.

Số tiền ông Năm có được ( cả gốc lẫn lãi) ở ngân hàng Y trong 9 tháng là

$(320 - x).(1+0{,}0073)^9$ triệu đồng

Theo giả thiết ta có: $x.(1+0{,}021)5 + (320 - x).(1+0{,}0073)^9 = 347{,}50776813$

Giải ra, ta được x= 140.

Vậy ông Năm gửi 140 triệu ở ngân hàng X và 180 triệu ở ngân hàng Y.

**Bài toán 5.** Lãi suất của tiền gửi tiết kiệm của một số ngân hàng thời gian vừa qua liên tục thay đổi. Chị Hà gửi số tiền ban đầu là 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% tháng chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên 1,15% tháng trong nửa năm tiếp theo và chị Hà tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn 0,9% tháng, chị Hà tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền chị Hà nhận được cả vốn lẫn lãi là 5 747 478,359 đồng (chưa làm tròn). Hỏi chị Hà đã gửi tiền tiết kiệm trong bao nhiêu tháng?

**Lời giải:**

Gọi X; Y (X, Y ∈ $Z^+$: X, Y ≤ 12) lần lượt là số tháng chị Hà đã gửi với lãi suất 0,7%/tháng và 0,9%/tháng . Theo công thức lãi kép, ta có số tiền chị Hà thu được cuối cùng là

$$5.10^6.1,007^X.1,0115^6.1,009^Y = 5747478,359$$

$$\Leftrightarrow 1,009^Y = \frac{5747478,359}{5.10^6.1,007^X.1,0115^6} \Leftrightarrow Y = \log_{1,009}\frac{5747478,359}{5.10^6.1,007^X.1,0115^6}$$

Kết hợp điều kiện; X và Y nguyên dương ta thấy X= 5 và Y= 4 thỏa mãn.

Vậy chị Hà đã gửi tiền tiết kiệm trong: 5 + 6 + 4= 15 tháng.

**2.3. Bài toán về lãi kép liên tục.**

**Bài toán :** Với số vốn 100 triệu đồng gửi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất 8% năm thì sau 2 năm số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là

$S_n = 100e^{2.8\%} \approx 117,351087$ đồng

**2.4. Bài toán về gửi tiền hàng tháng:**

**Ví dụ 3.** Đầu mỗi tháng ông Nam gửi vào ngân hàng số tiền 3 triệu đồng với lãi suất 0,6%/tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng ( khi ngân hàng đã tính lãi) thì ông Nam được số tiền cả gốc lẫn lãi từ 100 triệu trở lên?

**Lời giải:**

Áp dụng công thức (7), số tháng ít nhất ông Nam phải gửi để được số tiền cả gốc lẫn lãi từ 100 triệu trở lên là

$$n = \log_{1,006}\left(\frac{100.0,006}{3.1,006} + 1\right) \approx 30,3$$

Vậy ông Nam phải gửi ít nhất là 31 tháng mới được số tiền cả gốc lẫn lãi từ 100 triệu trở lên.

**Ví dụ 4.** Bạn muốn có 3000 USD để đi du lịch châu Âu. Để sau 4 năm thực hiện được ý định thì hàng tháng bạn phải gửi tiết kiệm bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết lãi suất 0,83 % một tháng.

**Lời giải:**

Gọi X (USD) là số tiền hàng tháng gửi tiết kiệm.

Ta có 4 năm = 12.4 = 48 tháng.

Áp dụng công thức ( 6) ta có $3000 = X\dfrac{1,0083^{49} - 1,0083}{0,0083}$

bấm máy tính ta được X ≈ 50,7 (USD). Do đó, mỗi tháng phải gửi 51 USD.

**Ví dụ 5.** Bà Năm gửi tiết kiệm hàng tháng với số tiền 20 000 000 đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,7% một tháng dự định gửi trong vào 36 tháng. Nhưng đến đầu tháng thứ 25 thì bà làm ăn thua lô không còn tiền để gửi vào ngân hàng nên buộc phải rút tiền ra khỏi ngân hàng đó. Biết số tiền thua lổ là 500 000 000 đồng. Hỏi sau khi rút tiền ra ngân hàng thì số tiền rút được T bằng bao nhiêu ? Bà Năm còn nợ hay đã trả hết rồi ?

**Lời giải:**

Chú ý:” đến đầu tháng thứ 25 thì bà Năm làm ăn thua lô không còn tiền để gửi vào ngân hàng nên buộc phải rút tiền ra khỏi ngân hàng đó”. Như vậy, bà Năm đã gửi đều đặn được 24 tháng.

Dạng toán gửi đều đặn hàng tháng

Số tiền bà nhận được

$$T_n = \frac{A(1+r)}{r}[(1+r)^2 - 1]$$

$$= \frac{20\,000\,000(1+0{,}7\%)}{0{,}7\%}[(1+0{,}7\%)^2 - 1]$$

= 524.343.391 đồng.

Bà Năm đã trả hết nợ và còn dư 24.343.391 đồng.

**2. 5. Bài toán gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng**

**Ví dụ 1.** Anh Thắng gửi ngân hàng 20 triệu đồng với lãi suất 0,75%/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, anh đến ngân hàng rút 300 nghìn đồng để chi tiêu. Hỏi sau 2 năm số tiền anh Thắng còn lại trong ngân hàng là bao nhiêu?

**Lời giải:**

Áp dụng công thức $S_n = A(1+r)^n - X\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$ , với X là tiền rút hàng tháng, r là lãi suất và A là số tiền ban đầu, ta có số tiền anh Thắng còn lại trong ngân hàng sau 2 năm là

$$S_{24} = 2.10^7.(1,0075)^{24} - 3.10^5.\frac{(1,0075)^{24} - 1}{0,0075} = 16071729,41 \text{ đồng.}$$

**Ví dụ 2.** Anh Chiến gửi ngân hàng 20 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, anh Chiến rút một số tiền như nhau để chi tiêu. Hỏi số tiền ( gần nhất) mỗi tháng anh Chiến rút là bao nhiêu để sau 5 năm thì số tiền vừa hết?

**Lời giải:**

Áp dụng công thức $X = \left[A(1+r)^n - S_n\right]\dfrac{r}{(1+r)^n - 1}$

Trong đó, A = 20 triệu đồng; r= 0,7%/ tháng, n = 5. 12 = 60 tháng và Sn = 0 ( vì khi đó anh Chiến đã rút hết tiền) ta được:

$$X = \frac{2.10^7.(1,007)^{60}.0,007}{(1,007)^{60} - 1}$$
$$= 409367,3765 \text{ đồng.}$$

**Ví dụ 3.** Chú Tư gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,6%/tháng. Sau mỗi tháng, chú Tư đến ngân hàng rút mỗi tháng 3 triệu đồng để chi tiêu cho đến khi hết tiền thì thôi. Sau một số tròn tháng thì chú Tư rút hết tiền cả gốc lẫn lãi. Biết trong suốt thời gian đó, ngoài số tiền rút mỗi tháng chú Tư không rút thêm một đồng nào kể cả gốc lẫn lãi và lãi suất không đổi. Vậy tháng cuối cùng chú Tư sẽ rút được số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến đồng)?

**Lời giải:**

Áp dụng công thức tính số tiền còn lại sau n tháng

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}}$$

Với A= 50 triệu đồng, r = 0, 6 và X= 3 triệu đồng ta được:

$$S_n = 50.1,006^n - 3.\frac{1,006^n - 1}{0,006}.$$

Để rút hết số tiền thì ta tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho:

$$S_n < 0 \Leftrightarrow 50.1,006^n - 3.\frac{1,006^n-1}{0,006}$$
$$\Leftrightarrow 500 - 450.1,006^n < 0$$
$$\Leftrightarrow n > \log_{1,006}\frac{500}{450} \Rightarrow n = 18$$

Khi đó số tiền tháng cuối cùng mà chú Tư rút là

$$S_{17}.1,006 = \left[50.1,006^{17} - 3.\frac{1,006^{17}-1}{0,006}\right].1,006$$
$$\approx 1,840269833\text{triệu đồng} \approx 1840270\text{ đồng}$$

**2.6. Bài toán về trả góp:**

**Bài toán 1.**Theo hình thức lãi kép, một người vay ngân hàng 100 triệu đồng, lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 1%. Người này trả nợ đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng cùng một số tiền m triệu đồng. Sau đúng một năm thì người này trả hết nợ. Tính số tiền m.

**Lời giải:**

Áp dụng công thức $m = \frac{A.r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ với A = 100 triệu; r = 1,0 % và n = 12 tháng.

Ta có $m = \frac{100.1\%(1+1\%)^{12}}{(1+1\%)^n - 1} \simeq 8,88488$(triệu đồng)

Để trả hết 100 triệu trong 1 năm thì người đó phải trả 1 tháng là 8,9 triệu đồng.

**Bài toán 2 .** Chị Ngọc vay trả góp ngân hàng số tiền 50 triệu đồng với lãi suất 1,15%/tháng trong vòng 4 năm thì mỗi tháng chị Ngọc phải trả gần với số tiền nào nhất ?

**Lời giải:**

Áp dụng công thức $m = \frac{A.r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ với A = 50 triệu; r = 1,15 % và n= 4.12= 48 tháng. Số tiền chị Ngọc phải trả mỗi tháng là

$$m = \frac{5.10^7.0,0115(1,0115)^{48}}{(1,0115)^{48} - 1} = 1361312,807 \quad \text{(đồng).}$$

**Bài toán 3.** Anh Sơn vay trả góp ngân hàng số tiền 500 triệu đồng với lãi suất 0,9%/tháng , mỗi tháng trả 15 triệu đồng. Sau bao nhiêu tháng thì anh Sơn trả hết nợ?

**Lời giải:**

Tổng số tiền anh Sơn phải trả sau n tháng (giả sử anh không trả lãi và gốc hàng tháng) là $A_n = A(1+r)^n$

Từ công thức $A = \dfrac{m.\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n}$ suy ra $n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{m}{m - Ar}\right)$

với A= 500 triệu; r= 0,9% ; X= 15 triệu đồng ta được n = 39, 80862049 ( tháng)

Do đó, để trả hết nợ thì anh Sơn phải trả nợ trong vòng 40 tháng.

**Ví dụ 3.** Một người vay ngân hàng số tiền 350 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 8 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 0,79% một tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Hỏi số tiền phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn)

**Lời giải:**

Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất nên đây là bài toán vay vốn trả góp cuối kỳ.

Gọi A là số tiền vay ngân hàng, B là số tiền trả trong mỗi chu kỳ, d= r% là lãi suất cho số tiền chưa trả trên một chu kỳ, n là số kỳ trả nợ.

Số tiền còn nợ ngân hàng (tính cả lãi) trong từng chu kỳ như sau:

+ Đầu kỳ thứ nhất là A.

+ Cuối kỳ thứ nhất là A(1+ d) − B.

+ Cuối kỳ thứ hai là :

[A( 1+ d) – B]. ( 1+ d) - B

= A. $(1+d)^2$ – B. [(1+ d) + 1].

+ Cuối kỳ thứ ba là :

[ A. $(1+d)^2$ – B.( 1+ d) + 1].(1+ d) – B

= A. $(1+d)^3$ – B.[ $(1+d)^2$ +(1+ d)+ 1].

……

+ Theo giả thiết quy nạp, cuối kỳ thứ n là

$$A(1+d)^n - B[(1+d)^{n-1} + \cdots + (1+d) + 1]$$

$$= A(1+d)^n - B\frac{(1+d)^n - 1}{d}$$

Vậy số tiền còn nợ (tính cả lãi) sau n chu kỳ là

$$A(1+d)^n - B\frac{(1+d)^n - 1}{d}$$

Trở lại bài toán, gọi n (tháng) là số kỳ trả hết nợ.

Khi đó, ta có:

$$A(1+d)^n - B\frac{(1+d)^n - 1}{d} = 0$$

$$\Leftrightarrow 350.1{,}0079^n - 8.\frac{1{,}0079^n - 1}{0{,}0079} = 0$$

$$\Leftrightarrow n \approx 53{,}9.$$

Tức là phải mất 54 tháng người này mới trả hết nợ.

Cuối tháng thư 53, số tiền còn nợ (tính cả lãi) là :

$$S_{53} = 350.1{,}0079^{53} - 8.\frac{1{,}0079^{53} - 1}{0{,}0079} \text{ (triệu đồng).}$$

Kỳ trả nợ tiếp theo là cuối tháng thứ 54 , khi đó phải trả số tiền S53 và lãi của số tiền này nữa là :

$$S_{53} + 0{,}0079.S_{53} = S_{53}.1{,}0079$$

$$\approx 7{,}139832 \text{ (triệu đồng).}$$

**Ví dụ 4.** Anh Bình vay ngân hàng 2 tỷ đồng để xây nhà và trả dần mỗi năm 500 triệu đồng. Kỳ trả đầu tiên là sau khi nhận vốn với lãi suất trả chậm 9% một năm. Hỏi sau mấy năm anh Bình mới trả hết nợ đã vay?

**Lời giải:**

Tương tự bài toán trên ta có công thức tính số tiền còn nợ (tính cả lãi) sau n chu kỳ là

Trở lại bài toán, để sau n năm (chu kỳ ở đây ứng với một năm) anh Bình trả hết nợ thì ta có $A(1+d)^{n-1} - B\dfrac{(1+d)^n - 1}{d}$.

$$A(1+d)^{n-1} - B\frac{(1+d)^n - 1}{d} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.1{,}09^{n-1} - 0{,}5.\frac{1{,}09^n - 1}{0{,}09} = 0$$

$$\Leftrightarrow n \approx 4{,}7$$

Vậy phải sau 5 năm anh Bình mới trả hết nợ đã vay.

**Bài táon 5.** Ông A mua được căn nhà ở uận 1 với giá 2 tỷ đồng. với số tiền quá lớn buộc ông A phải trả góp với lãi suất hàng tháng là 0,5%. Hàng tháng ông trả 30 triệu đồng (bắt đầu từ khi mua nhà). Hỏi sau 36 tháng thì số tiền ông còn nợ là (làm tròn đến đơn vị triệu):

**Lời giải:**

* Số tiền còn lại sau 36 tháng được tính theo công thức:

$$T_n = A\left(1+r\right)^{36} - m\left(1+r\right).\frac{\left(1+r\right)^{36} - 1}{r}$$

* Với A là số tiền nợ ban đầu , m là số tiền trả hàng tháng , r là lãi suất.

Ta có:

$$T_n = 2000(1+0{,}5\%)^{36} - 30(1+0{,}5\%).\frac{(1+0{,}5\%)^{36} - 1}{0{,}5\%}$$

$\approx 1207{,}377485$triệu đồng.

**2.7. Bài toán về giá trị hiện tại của niên kim.**

**Bài toán :**

Một người trúng xổ số giải đặc biệt với giá trị 5 tỉ đồng và số tiền trúng thưởng sẽ được trả dần hàng năm, mỗi năm là 500 triệu đồng trong vòng 10 năm. Hỏi giá trị hiện tại của giải đặc biệt này là bao nhiêu, giả sử rằng người đó có thể tìm hình thức đàu tư với lãi suất là 8% mỗi năm theo hình hức lãi kép?

**Lời giải:**

Mỗi năm thanh toán 500 triệu đồng trong vòng 10 năm, tức là khoản thanh toán đều đặn bằng nhau và bằng 500 triệu đồng hay R = 500 (triệu đồng) và số khoản thanh toán là n = 10 (năm).

Lãi suất 8% mỗi năm hay i = 8%.

Giá trị hiện tại của giải đặc biệt trên là

$$A_i = R\frac{1-(1+i)^n}{i} = 500\frac{1-(1+8\%)^{10}}{8\%} \approx 3355,0407 \quad \text{(triệu đông)}$$

***Nghĩa là giải thưởng 5 tỷ nếu trả góp 10 năm thì xem như giải thưởng đó chỉ có giá trị hiện tại là 3,333 tỷ.***

**2.8. Bài toán về lạm phát.**

Những câu hỏi thường gặp trong thực tế về lạm phát

1. Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ là bao nhiêu?

2. Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau 2 năm chỉ còn 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là bao nhiêu?

3. Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiên ban đầu chỉ còn lại một nửa ?

Trả lời:

1. Áp dụng công thức $A = P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$ ta có $A = 100\left(1-\frac{8}{100}\right)^2 = 84,64$ triệu đồng.

2. Áp dụng công thức $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ ta có

$$90 = 100\left(1 - \frac{r}{100}\right)^2 \quad \Leftrightarrow r = \left(1 - \sqrt{0,9}\right).100 = 5,13\%$$

3. Áp dụng công thức $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ với P gấp đôi A, ta có $\frac{P}{2} = P\left(1 - \frac{5}{100}\right)^n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{5}{100}\right)^n \Leftrightarrow n = \log_{\frac{19}{20}} \frac{1}{2} = 13,51$$

Vậy sau 14 năm với tỉ lệ lạm phát 5% thì sức mua còn lại một nửa.

***Trên đây là một số bài toán thường gặp trong cuộc sống. Hy vọng sẽ giúp các bạn có thêm kiến thức trong quá trình quản lý tài chính của bản thân một cách hiệu quả.***